

金属橡胶隔振器的非线性动力学

高永毅¹, 陈安华², 郭源君²

(1. 湖南科技大学 物理学院, 湘潭 411201;

2. 湖南科技大学 机械设备健康维护湖南省重点实验室, 湘潭 411201)

摘要: 在考虑金属橡胶隔振系统的非线性刚度和非线性迟滞恢复力的基础上, 建立金属橡胶隔振器的非线性动力学方程。采用谐波平衡法研究由基础激励的金属橡胶隔振器的非线性振动特性和振动稳定性, 导出频率响应方程, 讨论非线性因素的影响, 得出稳定区和不稳定区的分界线方程。结果表明: 迟滞恢复力所引起的非线性因素使主共振频率左移, 并得出刚度非线性和迟滞恢复力的忽略条件。

关键词: 金属橡胶隔振器; 非线性振动; 频率响应特性; 稳定性

中图分类号: TH17; TH113 **文献标识码:** A

Nonlinear dynamics of metal rubber damper

GAO Yong-yi¹, CHEN An-hua², GUO Yuan-jun²

(1. College of Physics, Hunan University of Science and Technology, Xiangtan 411201, China;

2. Hunan Provincial Key Laboratory of Health Maintenance for Mechanical Equipment,
Hunan University of Science and Technology, Xiangtan 411201, China)

Abstract: The nonlinear dynamics equation including nonlinear stiffness and hysteresis resilience was developed. The frequency response equation was derived and the nonlinear vibration characteristics and stability of the metal rubber damper to a seismic excitation were analyzed by the method of harmonic balance. The effect of nonlinear factors was studied. The division equation of the vibration stability and instability area was obtained. The results show that the nonlinear parameters by hysteresis resilience result in the left removal of the main resonance, and the condition of the nonlinear stiffness and hysteresis resilience neglected are obtained. The conclusions are helpful to the accurate design and effect analysis of metal rubber damper.

Key words: metal rubber damper; nonlinear vibration; frequency response characteristic; stability

金属橡胶是由于具有橡胶的弹性而得名, 从其内部组成来看, 它仍是金属, 是将金属丝卷成螺旋形、以使它们相互勾联嵌合、在经过加工成型为一种类似于橡胶分子结构的网状多孔结构的特种材料, 可以根据需要将其制成各种结构形状。金属橡胶材料将弹性与多孔性集于一身, 它具有阻尼大、吸收冲击能、不惧高低温作用和不易老化等特点, 可以弥补目前常用的橡胶隔振材料的弹性、阻尼特性易受环境温度的影响, 散热系数小, 在交变载荷作用下容易发热产生

热应力疲劳以及老化现象, 引起弹性阻尼特性的退化, 且抗污染、酸腐蚀能力差, 使用频率范围窄的缺点, 是适用于恶劣环境使用的优良材料, 而金属橡胶构件在特殊环境下表现出的优良性能是其它构件所无法比拟的。同时, 将该材料制成隔振器, 在系统的共振区阻尼较大, 可以有效地抑制共振; 而在系统的隔振区阻尼较小, 使系统具有良好的隔振效率, 因此, 它是一种很好的阻尼隔振材料。所以, 金属橡胶材料作为隔振器件在航空航天等领域日益得到广泛的重视^[1-2]。

近几十年来, 国内外专家学者对金属橡胶材料的隔振性能也进行了大量的研究, 目前许多研究工作者从理论和实验两方面对金属橡胶隔振系统的阻尼特性^[3-5]、隔振性能^[6-9]、动静态性能^[10-12]、迟滞恢复力模型的建立^[13]以及系统的力学和数学建模^[14-15]等问题进行研究。美国早在 20 世纪 60 年代就已在武器装备上采用金属橡胶构件^[2], 目前, 俄罗斯在金属橡胶技术方面的研究水平居世界前列, 利用金属橡胶技术解决很多国防及航空航天领域的疑难问题, 其战略导弹在 10 年存储期内无需检验就可以随时发射, 其关键就是大量采用金属橡胶构件^[2, 16]。

由于金属橡胶材料的本构关系呈非线性特性, 所以金属橡胶隔振系统是一个典型的非线性系统。为了给金属橡胶隔振器快速设计、制作和隔振效果分析提供可靠的理论依据, 对金属橡胶隔振材料的非线性本构关系以及系统的非线性特性的研究很有必要, 也是振动工程研究领域亟待解决的问题。因此, 本文作者将在其他研究者的基础上, 特别是在参考文献^[17]的基础上, 对金属橡胶隔振器的非线性振动特性进行研究。

1 金属橡胶隔振体的非线性动力学方程

1.1 金属橡胶的迟滞恢复力

金属橡胶的力学特性曲线是如图 1 所示的滞迟回线。李冬伟等^[18]指出, 金属橡胶的迟滞恢复力可以利用椭圆方程来近似表示:

$$f = k_d x_0 \cos \omega t - k_z x_0 \sin \omega t \quad (1)$$

式(1)是一个如图 1 所示的椭圆方程。其中, 参数 k_d 和 k_z 采用非线性最小二乘的方法确定。所以金属橡胶的迟滞恢复力可用式(1)表示。

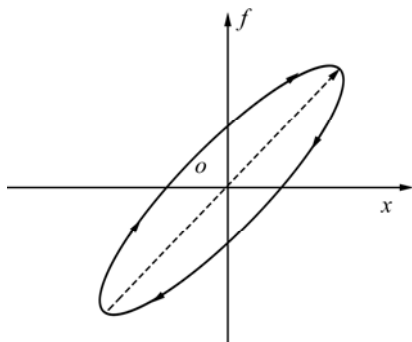


图 1 干摩擦力与位移的滞迟回线

Fig.1 Hysteresis loop of dry-friction force and distance

1.2 非线性动力学方程

文献^[17]给出了如图 2 所示的受基础激励的金属橡胶隔振器简化图, 其运动微分方程为

$$m\ddot{Z} + c(\dot{Z} - \dot{u}) + k(Z - u) + \beta(Z - u)^3 + f(t) = 0 \quad (2)$$

式中: Z 为被隔振体的绝对位移; u 为地基的振动位移; m 为金属隔振系统的质量; c 为系统的阻尼力系

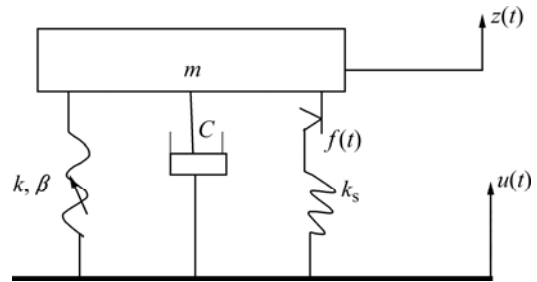


图 2 金属橡胶隔振器系统的力学模型

Fig.2 Model of metal rubber isolation system

数; k 为系统的线性刚度系数; β 为系统的非线性刚度系数; $f(t)$ 为金属橡胶隔振器的迟滞恢复力。金属橡胶隔振器系统的非线性弹性力为

$$F = k(Z - u) + \beta(Z - u)^3 \quad (3)$$

令

$$x = Z - u, u = u_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad (4)$$

式中: u_0 为地基的振动位移振幅, 可以通过测量得到。将式(1)和(4)代入式(2), 并令 $p_0^2 = k/m$, $\eta = \beta/m$, $2\xi p_0 = c/m$, $F_1 = (\omega^2 u_0 \cos \varphi - x_0 k_d/m)$, $F_2 = (\omega^2 u_0 \sin \varphi + x_0 k_z/m)$, 则得:

$$\ddot{x} + 2\xi p_0 \dot{x} + p_0^2 x + \eta x^3 = F_1 \cos \omega t + F_2 \sin \omega t \quad (5)$$

式(5)的稳态近似解为

$$x(t) = B \cos(\omega t) \quad (6)$$

因 $x_0 = B$, 则

$$\begin{aligned} F_1 &= (\omega^2 u_0 \cos \varphi - B k_d/m) \\ F_2 &= (\omega^2 u_0 \sin \varphi + B k_z/m) \end{aligned} \quad (7)$$

1.3 金属橡胶隔振体的稳态周期响应

考虑非线性刚度和非线性迟滞恢复力的金属橡胶被动隔振设计与隔振效果分析依赖于式(5)的有效求解。因为目前还不能求得式(5)的严格精确的分析解, 因此, 针对工程实际中隔振设计的需要, 采用谐波平衡法求式(5)的近似稳态周期解。通过对式(5)进行各种参数条件下的数值积分, 求得稳态响应并作傅里叶变

换,发现式(5)具有与基础激励同周期的稳态周期解,故将式(6)代入式(5),令同阶谐波系数相等,考虑式(7),并令 $p^2 = k/m + k_d/m$, 则有

$$\begin{cases} -(\omega^2 - p^2)B + \frac{3}{4}\eta B^3 - \omega^2 u_0 \cos \phi = 0 \\ 2\xi p_0 B \omega + \omega^2 u_0 \sin \phi + Bk_z/m = 0 \end{cases} \quad (8)$$

通过式(8)解出 B 和 ϕ 可得系统稳态响应。此外,由于式(5)中包含三次方非线性项,所以当金属橡胶隔振系统的刚度非线性因素不能忽略时,当基础激励频率接近派生系统固有频率的 1/3 或 1/9 时金属橡胶隔振系统的振动除了存在 $\omega=p$ 的主共振外,还存在频率为 3ω 或 9ω 的超谐波共振;当基础激励频率接近派生系统固有频率的 3 倍或 9 倍时,存在频率为 $\omega/3$ 或 $\omega/9$ 的亚谐波共振,这在金属橡胶隔振设计时需予以充分关注。

2 非线性因素的影响

陈安华等^[19]已指出 β/k 的大小反映刚度非线性的强弱。此外,从式(4)不难看出, η 的大小也反映金属橡胶隔振系统的刚度非线性的强弱。取与文献[19]中相同的参数对式(8)进行计算,可得刚度非线性的强弱(由 β/k 和 η 表征)对频响特性的影响,结果如图 3 所示。由图 3 可知, β/k 和 η 的值越大,系统的刚度非线性越强,频响曲线越向右弯曲,所以,只有 β/k 和 η 值很小时,才能忽略金属橡胶隔振系统刚度非线性因素的影响。

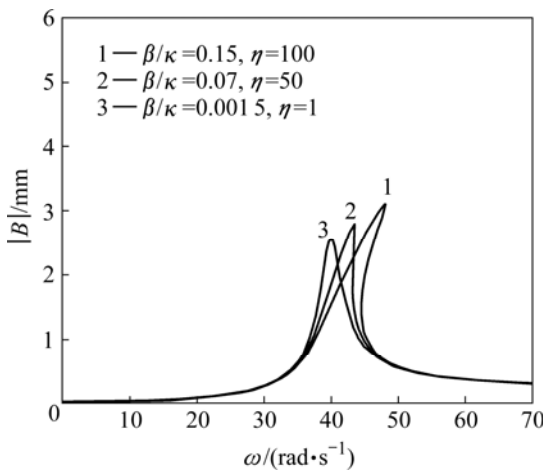


图 3 刚度非线性因素对频响特性的影响

Fig.3 Effect of nonlinear stiffness factors on frequency response

令 $x(t) = x_0 \cos(\omega t)$, 代入式(1)中,式(1)变为

$$f = k_d x(t) \pm k_z \sqrt{x_0^2 - x^2(t)} \quad (9)$$

由式(9)可知,如果 k_z 可以忽略,则金属橡胶隔振器的非线性迟滞恢复力就变为线性的。通过式(8)的第二式可以得出 $k_z = -(\omega^2 u_0 \sin \phi + 2\xi p_0 B \omega)m/B$ 。因此,只有当 $B \gg \omega^2 u_0 m \sin \phi / (1 - 2m\xi p_0 \omega)$ 时,才能忽略由金属橡胶隔振器的迟滞恢复力引起的非线性因素的影响。

3 金属橡胶频响特性

将方程(8)的两式平方相加,得频率响应方程为

$$\begin{aligned} & \left[-(\omega^2 - p^2)B + \frac{3}{4}\eta B^3 \right]^2 + \\ & \left(2\xi p_0 \omega B + \frac{Bk_z}{m} \right)^2 = \omega^4 u_0^2 \end{aligned} \quad (10)$$

从方程(10)可知,具有刚度非线性和迟滞恢复力的金属橡胶隔振系统的振动频率是振幅 B 的函数,即 $\omega=f(B)$ 。取与参考文献[19]中相同的参数,对式(10)进行数值计算,可得到金属橡胶隔振系统的频率响应特性曲线,结果如图 4 所示。

由图 4 可知,金属橡胶隔振系统的刚度非线性和迟滞恢复力使金属橡胶隔振系统的频率响应特性曲线呈硬特性,且导致突跳和滞后现象的。由图 4(b)可知,当频率 ω 从一个相对小的值开始逐渐增大,则振幅 $|B|$ 沿频响曲线也逐渐增大,直到点 1,在该点频响曲线的切线为垂直切线,当频率继续增大时,振幅突然从点 1 跳到频响曲线较低分支的点 2 上,然后沿频响曲线逐渐减小。反之,如果 ω 从一个相对大的值开始逐渐减小,则振幅 $|B|$ 沿频响曲线逐渐增大,直到点 3,在该点频响曲线的切线为垂直切线;当频率继续减小时,振幅突然跳到频响曲线较高分支的点 4 上,然后从点 4 开始,振幅沿频响曲线逐渐减小。在频响曲线上,两个跳跃之间形成一个滞后环。在滞后环内,振幅是频率的多值函数。分析和计算表明,当基础振动的幅值逐渐改变时,也存在振幅的突跳和滞后现象。

4 稳定性分析

设 $\psi(t)$ 为扰动变量,并令

$$x(t) = B \cos(\omega t) + \psi(t) \quad (11)$$

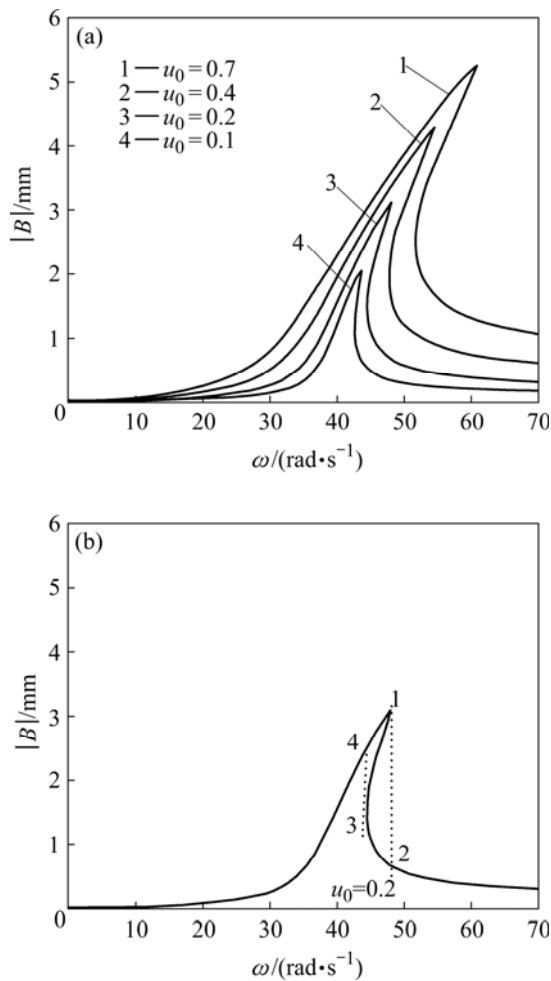


图 4 金属橡胶隔振系统的频率响应曲线
 Fig.4 Frequency response curves of metal rubber damper:
 (a) At different \$u_0\$ values; (b) At \$u_0=0.2\$

将式(11)代入式(5)得扰动方程如下:

$$\ddot{\psi}(t) + 2\zeta p_0 \dot{\psi}(t) + [p^2 + 3\eta B^2 \cos^2(\omega t)]\psi(t) = 0 \quad (12)$$

再令 \$\omega t = 2\tau\$, 则 \$\ddot{\psi} = \frac{\omega^2}{4} \frac{d^2\psi}{d\tau^2}\$, 并用 \$t\$ 代替 \$\tau\$, 经

整理式(12)为

$$\ddot{\psi}(t) + 2\mu\dot{\psi}(t) + [\delta + 2\alpha \cos(2t)]\psi(t) = 0 \quad (13)$$

式中: \$\delta = \frac{p^2}{\omega^2} + 2\alpha\$; \$\alpha = \frac{3\eta B^2}{4\omega^2}\$; \$\mu = \frac{\zeta p_0}{\omega}\$。

由此, 可以将求解式(5)的稳态周期解的稳定性转化为求解扰动式(13)零解的稳定性。

将式(13)的解和参数 \$\delta\$ 展开为小参数 \$\varepsilon\$ 的幂级数:

$$\psi(t, \varepsilon) = \psi_0(t) + \varepsilon\psi_1(t) + \varepsilon^2\psi_2(t) + \dots \quad (14)$$

$$\delta = \delta_0 + \varepsilon\delta_1 + \varepsilon^2\delta_2 \dots \quad (15)$$

将式(14)和(15)代入式(13), 并比较 \$\varepsilon\$ 同次幂系

数, 可得

$$\ddot{\psi}_0(t) + \delta_0\psi_0(t) = 0 \quad (16)$$

$$\ddot{\psi}_0(t) + \delta_0\psi_1(t) = -2\mu\dot{\psi}_0 - [\delta_1 + 2\cos(2t)]\psi_0 \quad (17)$$

式(16)的解为

$$\psi_0 = a \cos(nt) + b \sin(nt), \quad n=0, 1, 2, 3, \dots \quad (18)$$

其中 \$\delta_0 = n^2\$. 将 \$\psi_0\$ 代入式(18), 可得到稳定与不稳定区域的分界线如下^[20]:

$$n = 0 (\delta_0 = 0),$$

$$\delta = -\frac{1}{2}\varepsilon^2 + o(\varepsilon^3) \quad (19)$$

$$n = 1 (\delta_0 = 1),$$

$$\delta = 1 \pm (\varepsilon^2 - 4\mu^2)^{1/2} - \frac{1}{8}\varepsilon^2 + o(\varepsilon^3) \quad (20)$$

$$n = 2 (\delta_0 = 4),$$

$$\delta = 4 + \frac{1}{6}\varepsilon^2 \pm (\frac{1}{16}\varepsilon^4 - 16\mu^2)^{1/2} + o(\varepsilon^3) \quad (21)$$

由此可得式(5)在 \$|B| - \omega\$ 平面上的稳定和不稳定区域分界线。当取 \$\delta_0=1\$ 时, 分界线为

$$\frac{p^2}{\omega^2} + \frac{3\beta B^2}{2m\omega^2} = 1 \pm \left(\frac{9\beta^2 B^4}{4m^2 \omega^4} - \frac{4\xi^2 p_0^2}{\omega^2} \right)^{1/2} - \frac{9\beta^2 B^4}{32m^2 \omega^4} \quad (22)$$

取 \$\delta_0=4\$ 时, 分界线为

$$\frac{p^2}{\omega^2} + \frac{3\beta B^2}{2m\omega^2} = 4 + \frac{9\beta^2 B^4}{24m^2 \omega^2} \pm \left(\frac{81\beta^4 B^8}{256m^4 \omega^8} - \frac{16\xi^2 p_0^2}{\omega^2} \right)^{1/2} \quad (23)$$

利用式(21)和(22)可以在 \$|B| - \omega\$ 平面上绘出周期解稳定和不稳定区域的分界线, 其结果如图 5 所示。

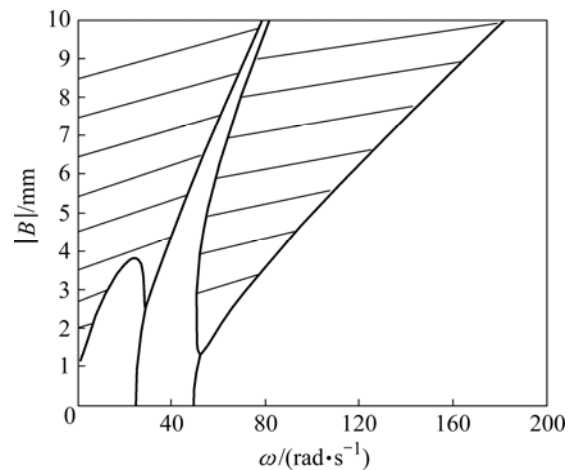


图 5 参数平面稳定区和不稳定区的分界线
 Fig.5 Decision lines of stable and unstable areas on parameter plane

其中,有阴影的区域为不稳定区域,其余为稳定区域。对金属橡胶隔振系统的隔振设计和隔振效果分析的工程实际而言,分界线上周期解的稳定性并不重要,但必须避免系统参量落入不稳定区域,以免发生参量共振。

5 结论

1) 金属橡胶隔振系统的频率响应特性曲线呈硬特性效应;迟滞恢复力所引起的非线性项使主共振频率左移。当非线性因素不能忽略时,除了存在主共振外,还可能存在超谐波洪振和亚谐波共振。

2) 具有刚度非线性和迟滞恢复力的金属橡胶隔振系统的振动产生突跳和滞后现象。当 $\omega=p$ 时,其振幅不一定是最大点;并获得忽略刚度非线性因素和迟滞恢复力的条件。

3) 研究金属橡胶隔振系统稳态周期响应的稳定性,得出其稳定区和不稳定区的分界线方程。只有系统的参量位于稳定区范围时,才有稳定的周期解,在这个区域进行隔振效果比较好。如果系统的参量落入不稳定区域时,将发生参量共振。

REFERENCES

- [1] LI Yu-yan, HUANG Xie-qing, MAO Wen-xiong. Theoretical model constructed and experimental investigation on nonlinear constitutive relation of elastic porousmetallic rubber[J]. Mechanics of Composite Materials, 2005, 41(4): 303-312.
- [2] 李宇燕. 金属橡胶隔振器的应用研究[J]. 飞航导弹, 2009, 5(5): 62-63.
LI Yu-yan. Application study of the metal rubber damper[J]. Winged Missiles Journal, 2009, 5(5): 62-63
- [3] 敖宏瑞, 姜洪源, 闫 辉, 夏宇宏. 单自由度金属橡胶隔振系统干摩擦阻尼的识别[J]. 机械设计, 2004, 21(4): 28-30.
AO Hong-ru, JIANG Hong-yuan, YAN Hui, XIA Yu-hong. Recognition on dry frictional damping of metal rubber vibration isolation system with single degree of freedom[J]. Journal of Machine Design, 2004, 21(4): 28-30.
- [4] 姜洪源, 敖宏瑞, 夏宇宏. 金属橡胶隔振器干摩擦阻尼特性的研究[J]. 机械设计, 2002, 11: 11-14.
JIANG Hong-yuan, AO Hong-ru, XIA Yu-hong. Research on dry friction damping characteristics of metallic rubber vibration isolator[J]. Journal of Machine Design, 2004, 21(1): 11-14.
- [5] 邓剑波, 朱梓根, 李其汉, 赵 杰. 悬臂梁根部金属橡胶减振器阻尼性能的实验研究[J]. 航空动力学报, 1998, 13(4): 425-427.
DENG Jian-bo, ZHU Zi-geng, LI Qi-han, ZHAO Jie. Damping characteristics of metal rubber damper on root of cantilever beam[J]. Journal of Aerospace Power, 1998, 13(4): 425-427.
- [6] 闫晓军, 李海燕, 聂景旭. SMA 拟橡胶金属阻尼元件及其在减振中的应用[J]. 北京航空航天大学学报, 2003, 29(1): 72-75.
YAN Xiao-jun, LI Hai-yan, NIE Jing-xu. SMA pseudo-rubber metal and its application in vibration control[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2003, 29(1): 72-75.
- [7] 王 新, 朱梓根. 环形金属橡胶减振器[J]. 航空动力学报, 1997, 12(2): 143-145.
WANG Xin, ZHU Zi-geng. Ring-like rubber damper[J]. Journal of Aerospace Power, 1997, 12(2): 143-145.
- [8] 黄协清, 张铁山, 张俊华. 金属橡胶隔振材料特性研究[J]. 机械科学与技术, 2000, 19(6): 977-980.
HUANG Xie-qing, ZHANG Tie-shan, ZHANG Jun-hua. Research on vibration isolation characteristics of metal rubber material[J]. Mechanical Science and Technology, 2000, 19(6): 977-980.
- [9] 陈艳秋, 朱梓根. 用于管路的薄金属橡胶减振器的性能研究[J]. 航空动力学报, 2001, 16(1): 175-178.
CHEN Yan-qiu, ZHU Zi-gen. Damping characteristics of thin metal rubber damper for aeroengine piping system[J]. Journal of Aerospace Power, 2001, 16(1): 175-178.
- [10] 李宇明, 郑 坚, 白鸿柏. 金属橡胶材料的动力学模型[J]. 材料研究学报, 2003, 17(5): 499-504.
LI Yu-ming, ZHENG Jian, BAI Hong-bai. Dynamic mechanics model of metal-rubber material[J]. Chinese Journal of Materials Research, 2003, 17(5): 499-504.
- [11] 许建东, 郭宝亭, 朱梓根, 李其汉. 金属橡胶材料的振动特性[J]. 航空动力学报, 2004, 19(5): 619-622.
XU Jian-dong, GUO Bao-ting, ZHU Zi-gen, LI Qi-han. The vibration performance of metal-rubber material[J]. Journal of Aerospace Power, 2004, 19(5): 619-622.
- [12] 马艳红, 郭宝亭, 朱梓根. 金属橡胶材料静态特性的研究[J]. 航空动力学报, 2004, 19(3): 326-331.
MA Yan-hong, GUO Bao-ting, ZHU Zi-gen. Static characteristics of metal-rubber[J]. Journal of Aerospace Power, 2004, 19(3): 326-331.
- [13] YAR M, HAMMOND J K. Parameter estimation for hysteretic systems[J]. Journal of Sound and Vibration, 1987, 117(1): 161-172.
- [14] 郭宝亭, 朱梓根, 崔荣繁. 金属橡胶材料的理论模型研究[J]. 航空动力学报, 2004, 19(3): 314-319.
GUO Bao-ting, ZHU Zi-gen, CUI Rong-fan. Theoretical model of metal-rubber[J]. Journal of Aerospace Power, 2004, 19(3): 314-319.

- [15] 李冬伟, 毛志俊, 谭人仁. 一种金属橡胶元件建模方法研究[J]. 军械工程学院学报, 2005, 17(2): 64-66.
LI Dong-wei, MAO Zhi-jun, TAN Ren-ren. Research on a new method for modeling of metal rubber[J]. Journal of Ordnance Engineering College, 2005, 17(2): 64-66.
- [16] 杜金名, 耿 锋. 金属橡胶材料在导弹武器系统中的应用研究[J]. 飞航导弹, 2004, 8(8): 56-59.
DU Jin-ming, GENG Feng. Application of metal-rubber in missilery system[J]. Winged Missiles Journal, 2004, 8(8): 56-59.
- [17] 姜洪源, 敖宏瑞, 李瑰贤. 金属橡胶隔振器动力学模型与分析[J]. 湖南科技大学学报: 自然科学版, 2003, 20(2): 14-17.
JIANG Hong-yuan, AO Hong-rui, LI Gui-xian. Modeling and analysis of dynamic characteristics of metal rubber isolator[J]. Journal of Hunan University of Science & Technology: Natural Science Edition, 2003, 20(2): 14-17.
- [18] 李冬伟, 白鸿柏, 崔坤林, 杨建春, 刘英杰. 金属橡胶薄壁壳体件减振器阻尼性能分析[J]. 机械科学与技术, 2003(7): 173-177.
LI Dong-wei, BAI Hong-bai, CUI Kun-lin, YANG Jian-chun, LIU Ying-jie. Research on the damping performance of the egg shell shock absorber made of metal rubber[J]. Mechanical Science and Technology, 2003(7): 173-177.
- [19] 陈安华, 刘德顺, 朱萍玉. 被动隔振体的非线性振动分析[J]. 机械工程学报, 2001, 37(6): 99-105.
CHEN An-hua, LIU De-shun, ZHU Ping-yu. Nonlinear response analysis of a passively vibration-isolated body[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2001, 37(6): 99-105.
- [20] 周纪卿, 朱因远. 非线性振动[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 1998: 247-248.
ZHOU Ji-qing, ZHU Yin-yuan. Nonlinear vibration[M]. Xi'an: Publishing Company of Xi'an Jiaotong University, 1998: 247-248.
- [21] MALLIK A K, KBER V, PURI M. On the modeling of nonlinear elastomeric vibration isolators[J]. Journal of Sound and Vibration, 1999, 219(2): 239-253.

(编辑 龙怀中)